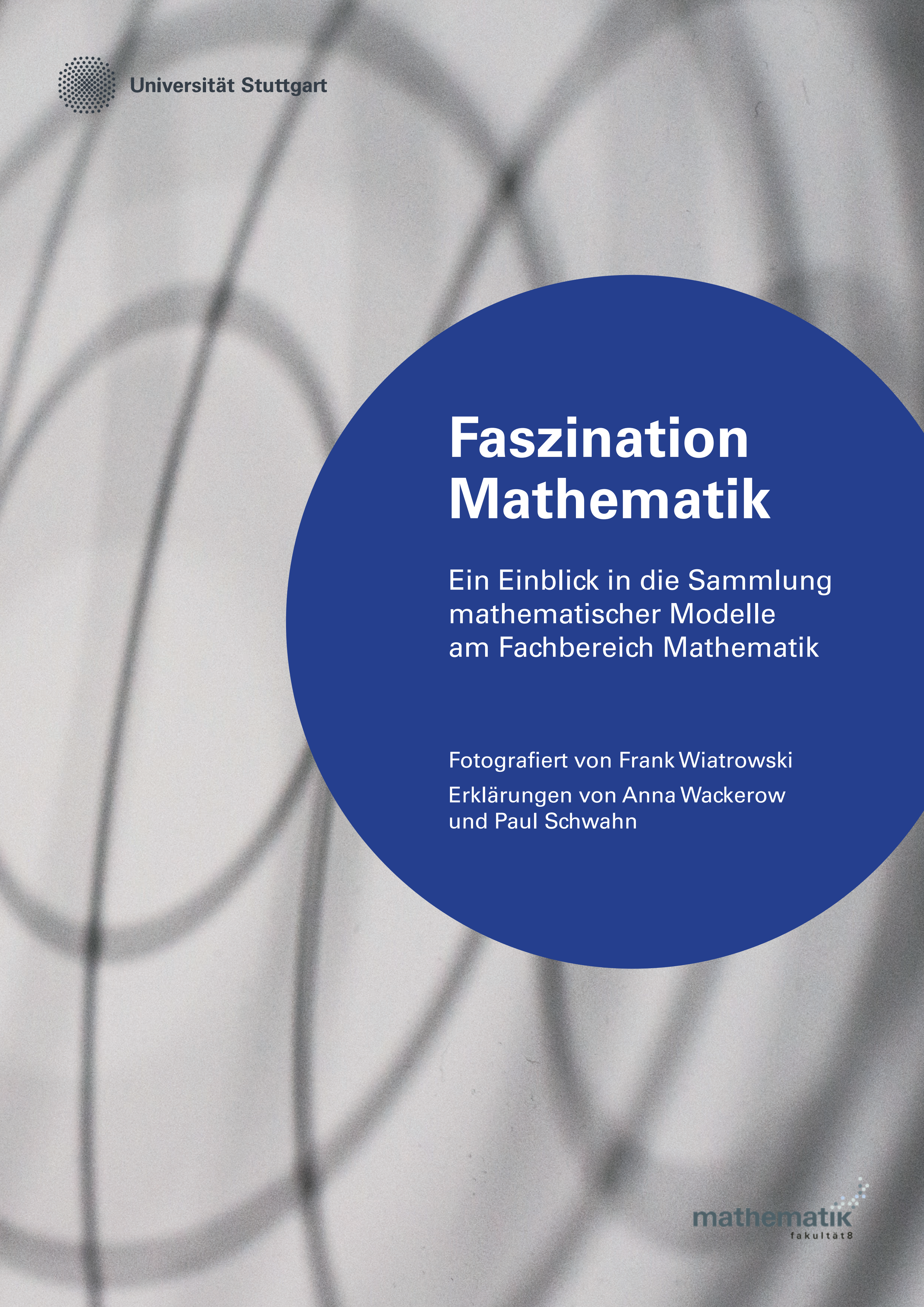


Universität Stuttgart

Faszination Mathematik

Ein Einblick in die Sammlung mathematischer Modelle am Fachbereich Mathematik

Fotografiert von Frank Wiatrowski

Erklärungen von Anna Wackerow und Paul Schwahn

mathematik
fakultät8

Über die Begreifbarmachung der Mathematik

„L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite;
la géométrie n'est qu'une algèbre figurée."

Sophie Germain, frz. Mathematikerin, 1776-1831

Seit jeher benutzen Wissenschaftler und Ingenieure Modelle, um abstrakte und theoretische Ideen begreifbar zu machen. Die Verben „begreifen" und „erfassen" reflektieren die ursprüngliche Wichtigkeit einer haptischen Erfahrung für Erkenntnis und Verständnis. Genau hierin lag der Zweck der historischen, bis ins 19. Jahrhundert zurückreichenden mathematischen Modellsammlung der Universität Stuttgart: Die abstrakte Natur der Zahlen durch geometrische Figuren wortwörtlich begreifbar zu machen.

Die nachfolgende moderne Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert legte ihren Fokus freilich auf einen axiomatischen und formalen Aufbau, der diese Art der Mathematikvermittlung lange Zeit obsolet erschienen ließ. Es war ironischerweise die rasante Entwicklung computergestützter Methoden in der Mathematik, die die damit einhergehenden Möglichkeiten der Visualisierung wieder aufgriff. Der 3D-Druck ermöglichte es wiederum, den virtuellen Darstellungen ihre ursprüngliche konkrete und begreifbare Realität zurückzugeben.

Die Tradition der historischen Modelle fortführend, werden am Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart solche 3D-Modelle aktiv in der Lehre verwendet. Unsere Modellsammlung ist also keinesfalls nur historischer Natur, sondern entwickelt sich dynamisch mit den Möglichkeiten unserer Zeit weiter. Die diesen Modellen ureigene immanente Ästhetik - eindrucksvoll von den Fotografien dieser Broschüre inszeniert - wird dabei hoffentlich auch einem breiteren Publikum die Schönheit der Mathematik erfahrbar machen.

Prof. Dr. Frederik Witt

Vorgestellt werden folgende Modelle:

- ein Globusmodell
- eine Spindelzyklide
- eine Regelfläche 3. Ordnung
- die Erzeugung eines einschaligen Rotationshyperboloides durch Rotation einer zur Achse windschiefen Gerade
- ein abgestumpftes Ikosaeder
- ein bewegliches Ellipsoid
- ein Plücker-Konoid und hyperbolisches Paraboloid

Die komplette Sammlung der mathematischen Modelle wird auf der Homepage des Fachbereichs Mathematik vorgestellt:
https://www.f08.uni-stuttgart.de/mathematik/sammlungen/

Globusmodell

Das Modell eines Globus eignet sich zur Erklärung sphärischer Koordinaten. Diese werden in der Regel mit θ, φ und r bezeichnet.

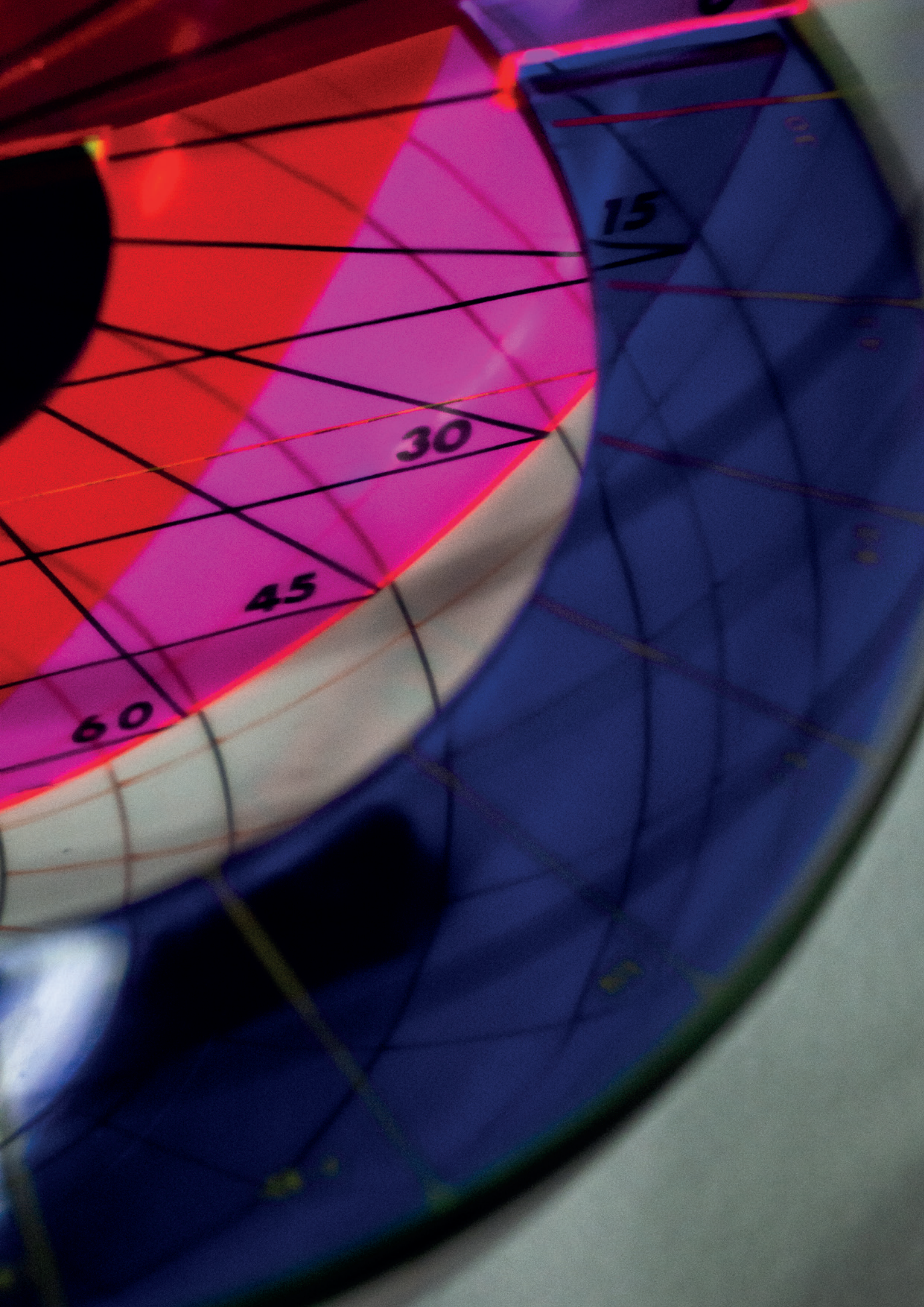
Der Höhenwinkel θ gibt die geographische Breite an und läuft hier von 90° Süd am Südpol über 0° am Äquator bis 90° Nord am Nordpol. In Polarkoordinaten entspricht das dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Die sogenannten Breitenkreise sind Linien konstanter geographischer Breite. Diese sind in Abständen von 15° auf dem Globus eingezeichnet. Zudem sind die Polarkreise (jeweils bei 66,57°) und Wendekreise (jeweils bei 23,43°) markiert.

Die geographische Länge wird durch den Azimutwinkel φ angegeben. Dieser läuft hier von 180° West über den Nullmeridian bis 180° Ost, was in Polarkoordinaten dem Intervall $[-\pi, \pi]$ entspricht. Am Äquator findet man zugehörige Markierungen in Abständen von 15°. Auf der südlichen Halbkugel sind zudem Linien konstanter geographischer Länge, die sogenannten Meridiane, eingezeichnet.

Die Koordinate r gibt den Abstand vom Ursprung an. Auf der Kugeloberfläche, auch Sphäre genannt, ist r konstant und gleich dem Radius der Kugel.

Die drehbaren Halbscheiben im Inneren des Modells sind Flächen, auf denen die Koordinate φ konstant ist. Auf ihnen befinden sich auch die zu den Breitenkreisen gehörigen Gradangaben.

Globusmodell
durchsichtig, auf Standfuß,
mit zwei beweglichen Innenhalbkreisen und Gradeinteilung, zur Behandlung von geographischer Länge und Breite
24 x 29 cm, Kunststoff
Leybold-Heraeus 1979
Inventarnummer K_15


15
30
45
60

Spindelzyklide

Eine Kanalfläche ist die Einhüllende einer Kugelschar, deren Mittelpunkte auf einer vorgegebenen Kurve, der sogenannten Leitkurve, liegen. So entsteht z.B. ein Torus (anschaulich ein „Fahrradschlauch“ oder „Beigel“) als Einhüllende einer Kugelschar, deren Kugeln einen konstanten Radius d haben und deren Mittelpunkte sich entlang eines Kreises des Radius a bewegen. Andere bekannte Beispiele von Kanalflächen sind Zylinder oder Kegel; Kanalflächen sind in diesem Sinne einfache Bausteine komplizierterer geometrischer Objekte.

Eine Verallgemeinerung des Torus sind die sogenannten elliptischen Dupinschen Zyklide, benannt nach dem französischem Mathematiker Charles Dupin (1784-1873). Die Leitkurve dieser Kanalflächen ist eine Ellipse mit Halbachsen der Länge a>b. Die Kugeln haben einen Radius, der kontinuierlich in Abhängigkeit vom Ort des Kugelmittelpunkts auf der Ellipse zwischen den Werten d-c und d+c variiert, wobei c2=a2-b2 gilt. Im speziellen Fall eines Kreises, also a=b und damit c=0, erhalten wir gerade einen Torus, dessen Radius a und „Schlauchdicke“ d beträgt.

Eine wichtige Anwendung der Dupinschen Zyklide findet sich im Bereich des computergestützten Konstruierens (CAD), da sie sich zur Modellierung glatter Übergänge zwischen Kanalflächen eignen. Lange bevor man sich solche Anwendungen erträumen konnte, wurden zur Veranschaulichung verschiedenster geometrischer Objekte Gipsmodelle in Serie angefertigt. Unsere Modelle der Dupinschen Zykliden stammen von Peter Vogel aus dem Jahre 1880 und wurden vom Verlag Ludwig Brill veröffentlicht.

In dem unten abgebildeten Modell der Stuttgarter Sammlung handelt es sich um eine sogenannte Spindelzyklide, eine elliptische Dupinsche Zyklide mit d>a. Im Spezialfall a=b wäre dies ein Torus, dessen „Schlauchdicke“ so groß ist, dass das Loch in der Mitte komplett verschwindet und in eine „Spindel“ übergeht, die diesen Zykliden ihren Namen gibt. Das Modell ist ein aus Gips gegossener Körper, auch wenn die Spindelzyklide selbst nur der Oberfläche des Modells entspricht. Zusätzlich muss beachtet werden, dass nur ein Teil der Oberfläche zu sehen ist, da die Spindelzyklide aufgeschnitten wurde, um die Spindel und die aufspannende Kugelschar im Innern des Modells sichtbar zu machen. Man erkennt dadurch sowohl die Ellipse der Leitkurve, als auch die Kugeln, die entlang dieser Leitkurve variieren; ihr Radius wird nach rechts hinten immer größer.

Spindelzyklide 1. Art
Brill Serie 5
Vier Formen der Dupin'schen Zyklide
von Peter Vogel 1880
11 x 11 x 11 cm, Gips
Inventarnummer Gm_25

Regelfläche 3. Ordnung

Eine Regelfläche ist eine Fläche im Raum, die aus Geraden besteht. Das heißt, durch jeden auf der Regelfläche liegenden Punkt verläuft eine Gerade, die selbst ganz in der Fläche enthalten ist.

Bekanntermaßen erhält man einen Kegelschnitt, indem man einen Doppelkegel mit einer Ebene schneidet. Dieser hat beispielsweise die Form eines Kreises, einer Ellipse oder einer Hyperbel.

Eine Regelfläche 3. Ordnung konstruiert man nun folgendermaßen: Man betrachte zwei feste Geraden g_1 und g_2 (die Leitgeraden) im Raum, sowie einen Kegelschnitt C (den Leitkegelschnitt). Die Gesamtheit aller Geraden, die sowohl g_1, g_2 als auch C treffen, bilden nun einer Regelfläche 3. Ordnung. Dabei betrachtet man auch die Spezialfälle, in denen eine der beiden Geraden g_1, g_2 oder der Kegelschnitt C ins Unendliche verschoben sind.

Im abgebildeten Modell liegt letzterer Spezialfall vor: Der Leitkegelschnitt, der im Unendlichen liegt, wird durch den definierenden Kegel angedeutet. Dieser wird durch eine Schar roter Geraden erzeugt. Die Leitgeraden g_1, g_2 werden durch Messingstäbe dargestellt. Dabei schneidet die zweite Leitgerade die unendlich ferne Ebene des Kegelschnitts in einem außerhalb dessen gelegenen Punkt. Die Regelfläche selbst wird von den schwarzen Geraden erzeugt, welche die beiden Leitgeraden sowie den Leitkegelschnitt treffen.

Regelflächen 3. Ordnung 3. Fall
21 x 21 x 20 cm, Metall, Faden
Inventarnummer Fm_26

Erzeugung eines einschaligen Rotationshyperboloides durch Rotation einer zur Achse windschiefen Gerade

Welche Form erhält man, wenn man eine Stange um eine Achse dreht? Eine Gerade wird um eine Drehachse gedreht, zu der sie windschief ist (das bedeutet, sie ist weder parallel zur Drehachse, noch schneidet sie sie). Welche Form muss ein Loch in einer Glaswand haben, damit die Stange durch diese Glaswand hindurchgleiten kann?

Die Funktionsgleichung zu der Kurve, die das Loch im Glas beschreibt, erhält man mithilfe des Satzes des Pythagoras. In einem Koordinatensystem mit Ursprung im Befestigungspunkt der Stange und x-Richtung nach rechts und y-Richtung nach oben erhält man damit

$$y = \pm am\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Es handelt sich also um eine Hyperbel. Die Zahl a ist dabei der Abstand der beiden Geraden, m beschreibt die Steigung der Stange im Verhältnis zum Boden. Die Spur der Stange, also die Menge aller Punkte, die sie in einer ganzen Drehung überstreicht, ist ein Hyperboloid. Umgekehrt findet man deshalb auf der Oberfläche eines Hyperboloids genau diese Geraden, die windschief zur Mittelachse des Hyperboloids sind.

Erzeugung eines einschaligen Rotationshyperboloides durch Rotation einer zur Achse windschiefen Gerade
30 x 21 x 21 cm, Holz, Messing, Plexiglas
Mathematische Modelle Darmstadt, 1956
Inventarnummer Dre_5

Abgestumpftes Ikosaeder - Fußball

Das Ikosaeder gehört zu den platonischen Körpern. Dies sind Körper, die nur von gleichen regelmäßigen Vielecken begrenzt werden. Es gibt insgesamt fünf verschiedene platonische Körper, darunter auch den Würfel, der von sechs Quadraten begrenzt wird.

Ein Ikosaeder wird von 20 Dreiecken begrenzt. An jeder der zwölf Ecken des Ikosaeders treffen sich dabei fünf Dreiecke. Unser Modell zeigt ein abgestumpftes Ikosaeder. Um vom Ikosaeder zu diesem abgestumpften Ikosaeder zu gelangen, werden die zwölf Ecken abgesägt. Die Dreiecke werden dabei zu Sechsecken und die Schnittflächen sind die Fünfecke. Die Ecken werden genau so abgeschnitten, dass die Sechsecke lauter gleichlange Seiten haben, also regelmäßig sind. Der Körper aus 20 Sechsecken und zwölf Fünfecken findet in verschiedenen Bereichen Anwendung: Der klassische Fußball mit den schwarzen Flecken auf weißem Grund hat genau die Struktur des abgestumpften Ikosaeders. Auch ein sehr großes Kohlenstoff-Molekül, das Fulleren, hat genau diese Struktur.

Man kann sich auch vorstellen, dass ein Ikosaeder und ein Dodekaeder (bestehend aus zwölf Fünfecken) übereinandergelegt werden. Der Schnitt ist das abgestumpfte Ikosaeder. Dadurch werden aus den Seitenflächen sozusagen die neuen Seitenflächen ausgeschnitten. Die Dreiecke werden wie bei der obigen Herangehensweise zu Sechsecken und die Fünfecke des Dodekaeders sind zwar wieder Fünfecke, jedoch in umgekehrter Ausrichtung. Die ursprünglichen Fünfecke im Dodekaeder teilen jeweils eine Kante mit ihren benachbarten Fünfecken. Die neuen Fünfecke zeigen mit einer Ecke in Richtung der nächstgelegenen Fünfecke.

Da das abgestumpfte Ikosaeder aus regelmäßigen Vielecken (Fünfecken und Sechsecken) besteht, die sich an jeder Ecke auf die gleiche Art treffen, gehört es zu den sogenannten archimedischen Körpern. Es gibt 13 archimedische Körper. Einige davon entstehen wie das abgestumpfte Ikosaeder durch das Abstumpfen eines platonischen Körpers.

Abgestumpftes Ikosaeder
gelb: Dodekaeder
blau: Ikosaeder
28 cm, Papier
Inventarnummer Pa_M 19

Bewegliches Ellipsoid

Eine Ellipse kann man sich vorstellen wie einen gestauchten Kreis. Anstatt eines Radius r gibt es dann die große Halbachse a und die kleine Halbachse b. Diese geben sozusagen den „Radius“ an der dicksten und dünnsten Stelle der Ellipse an. Das gleiche funktioniert auch in drei Dimensionen: Auch eine Kugel kann entlang der drei Raumrichtungen gestreckt oder gestaucht werden. Ein Ellipsoid hat nicht nur zwei, sondern drei Halbachsen.

Die kleinste Halbachse ist der Abstand vom Mittelpunkt zu dem Punkt auf dem Ellipsoid, der ihm am nächsten liegt. Die größte Halbachse ist analog dazu der Abstand zwischen Mittelpunkt und dem entferntesten Punkt. Alle drei Halbachsen sind zueinander rechtwinklig – mit dieser Bedingung findet man auch die dritte Halbachse.

Schneidet man das Ellipsoid mit einer Ebene, so erhält man immer eine Ellipse. In manchen Fällen erhält man sogar einen Kreis. Jedes Ellipsoid besitzt solche Kreisschnitte. Es gilt, die entsprechenden Ebenen und damit die Kreise zu finden. Hat man einen Kreis gefunden, dann ergibt jede dazu parallele Ebene geschnitten mit dem Ellipsoid wieder einen Kreis (solange die Ebene überhaupt das Ellipsoid schneidet). Diese Eigenschaft wurde bei diesem Modell eines beweglichen Ellipsoids genutzt. Die Metallstangen, aus denen das Modell besteht, sind genau diese Kreise auf der Oberfläche des Ellipsoids. Es gibt zwei Scharen von Kreisen, die jeweils untereinander parallel sind. Bewegt man das Ellipsoid, so bleiben die Kreise einer Schar immer parallel, jedoch ändert sich der Winkel zwischen den beiden Kreisscharen. Die mittlere Halbachse verläuft in unserem Modell von der Mitte nach oben. Die kleinste und größte Halbachse liegen auf den Winkelhalbierenden der Schnittwinkel der Ebenen der größten Kreise.

Bewegliches Ellipsoid
(vier reelle Nabelpunkte)
45 cm, Metall
Karl Kolb Frankfurt Mathematische Modelle,
1978
Inventarnummer Pm_10

Plücker-Konoid und hyperbolisches Paraboloid

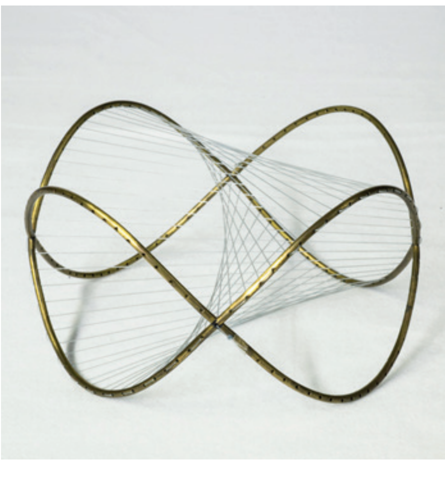
In diesem Modell sind zwei verschiedene Flächen miteinander überlagert dargestellt. Es handelt sich um das Plücker-Konoid und das hyperbolische Paraboloid.

Konoide sind eine bestimmte Sorte von Regelflächen. Das bedeutet, sie werden von einer Geradenschar aufgespannt. Von anderen Regelflächen unterscheiden sich Konoide durch zwei zusätzliche Eigenschaften: Alle Geraden sind parallel zu einer gemeinsamen Ebene und verlaufen durch eine gemeinsame Gerade, die Achse genannt wird.

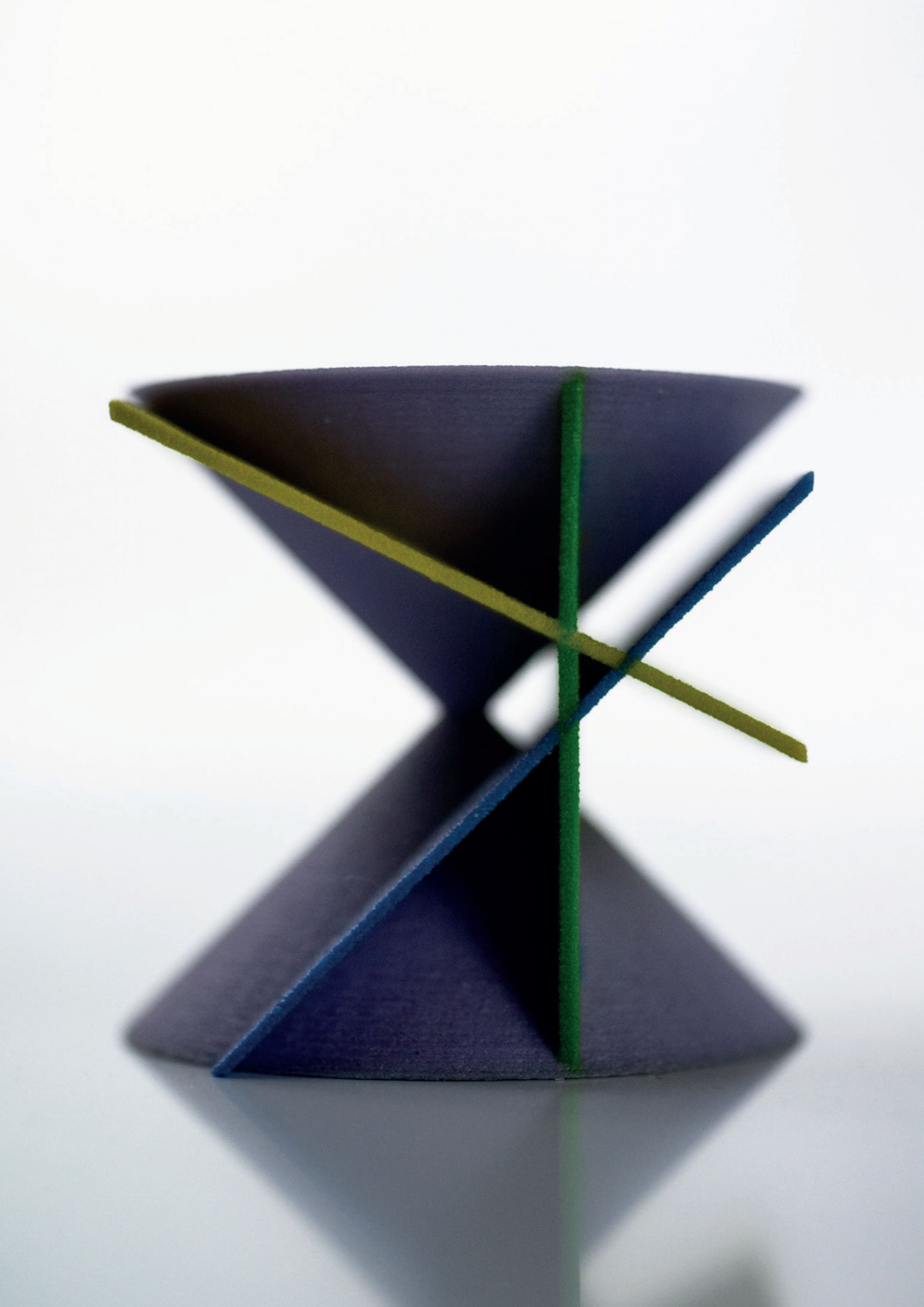
Das in unserem Modell dargestellte Konoid nennt man Plücker-Konoid. Alle Geraden, dargestellt durch die dünnen Drähte, sind parallel zu der Ebene, auf der das Modell liegt. Die Achse, also die Gerade, die alle erzeugenden Geraden des Konoids schneidet, befindet sich in der Mitte des Modells senkrecht nach oben. Da sie also senkrecht zur Ebene liegt, sagt man, dass das Plücker-Konoid gerade ist.

Das hyperbolische Paraboloid ist sozusagen eine Erweiterung der Parabel in drei Dimensionen. Dabei entsteht eine Sattelfläche, die aus Geraden besteht.

Wählt man die höchste und die niedrigste Gerade des Plücker-Konoids, so sind die Punkte des hyperbolischen Paraboloids genau diejenigen Punkte, die zu den beiden Geraden denselben Abstand haben. Dies gilt nicht nur, wenn man die höchste und niedrigste Gerade wählt. Zu jeder Gerade des Plücker-Konoids findet man eine passende Gerade, sodass diese Bedingung erfüllt ist. Alle diese Geradenpaare bilden das Plücker-Konoid.



Plücker-Konoid
und hyperbolisches Paraboloid
8 x 15 cm, Metall und Faden
Inventarnummer Fm_32



Mathematische Modelle in der Anwendung:
Lehrsammlung 3D-Drucke des Lehrexportzentrums Mathematik
an der Universität Stuttgart

Die Modelle wurden von Apl. Prof. Dr. Markus Stroppel, Michael Kutter und Alexander Kerschl entwickelt. Sie dienen der Unterstützung der mathematischen Grundausbildung für Studierende in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen in Bezug auf Raumanschauung und der Beziehung der Raumanschauung zur mathematischen Modellierung. Die 3D-Modelle werden in Übungsgruppen und Sprechstunden eingesetzt. Der unmittelbare Bezug zu den dort behandelten Themen wird dadurch gesichert, dass sich Übungsaufgaben zum Lehrstoff auf die Modelle beziehen. Neben der haptischen Erfahrung mit dem Modell stehen zur Vor- oder Nacharbeit auch Online-Versionen zur Verfügung.

Die Modelle wurden (mit finanzieller Unterstützung aus Qualitätssicherungsmitteln der Universität Stuttgart) am LExMath - Lehrexportzentrum Mathematik - geplant und entworfen. Eine Übersicht ist auf der Homepage des Fachbereichs Mathematik/Sammlung zu finden.

Impressum

Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart

Idee und Gestaltung:
Katja Stefanie Engstler
Fotografie: Frank Wiatrowski
Texte:
Anna Wackerow (S. 10, 12, 14, 16)
Paul Schwahn (S. 4, 8)
Prof. Frederik Witt (S. 6)

Homepage der Sammlung:
https://www.f08.uni-stuttgart.de/mathematik/sammlungen/